Inverser sans inverser:

Référence : François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, page 158.

Théorème 1. *Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme $||.||$ sous-multiplicative. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On pose*

$$F: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ X & \mapsto & 2X - XAX \end{array}.$$

On définit la suite récurrente (X_p) par $X_0 \in E$ tel que $I_n - AX_0|| < 1$, et $X_{p+1} = F(X_p)$. Cette suite converge vers A^{-1}. Plus précisément, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$||I_n - AX_p|| \leq ||I_n - AX_0||^{2^p}.$$

Preuve :

L'application F est polynomiale en les éléments de la matrice X, donc elle est de classe C^1 sur E. De plus, $F(A^{-1}) = 2A^{-1} - A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$. Donc A^{-1} est un point fixe de F. Pour tout $X, H \in E$, on a

$$F(X+H) - F(X) = 2H - HAX - XAH - HAH,$$

d'où en isolant les termes linéaires en H, on a :

$$DF(X).H = 2H - HAX - XAH.$$

En particulier, $DF(A^{-1}) = 0$. Donc A^{-1} est un point fixe superattractif de F.

Par continuité de DF en A^{-1}, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $\alpha > 0$ tel que $||X - A^{-1}|| \leq \alpha$ entraine que $||DF(X) - DF(A^{-1})|| = ||DF(X)|| \leq \varepsilon$. Le théorème des accroissements finis donne

$$||X_{p+1} - A^{-1}|| = ||F(X_p) - F(A^{-1})|| \leq \varepsilon ||X_p - A^{-1}|| \leq ||X_p - A^{-1}||$$

dès lors que $||X_p - A^{-1}|| \leq \alpha$. Par récurrence sur p, on vérifie que cette inégalité est vérifiée pour tout $p \in \mathbb{N}$ dès que $||X_0 - A^{-1}|| \leq \alpha$ et que

$$||X_p - A^{-1}|| \leq \varepsilon^p \alpha.$$

Ainsi, comme $\varepsilon < 1$, on a $X_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} A^{-1}$.

On a $AF(X) = 2AX - (AX)^2$ d'où $I_n - AF(X) = (I_n - AX)^2$ pour tout $X \in E$. En particulier,

$$||I_n - AX_{p+1}|| \leq ||I_n - AX_p||^2,$$

et on en déduit par récurrence sur p :

$$||I_n - AX_p|| \leq ||I_n - AX_0||^{2^p}.$$

Il y a donc convergence d'ordre deux de AX_p vers I_n, donc de X_p vers A^{-1} dès lors que $||I_n - AX_0|| \leq 1$. $\square$

Proposition 2. $X_0 = \frac{{}^tA}{Tr(A^tA)}$ *convient pour la norme $||.||$ subordonnée à la norme $||.||_2$.*

Preuve :

La matrice $I_n - A^tA$ est une matrice symétrique réelle, donc son rayon spectral, qui est égal au maximum des modules de ses valeurs propres vaut $||I_n - A^tA||$.

Comme A inversible, la matrice $A^tA/Tr(A^tA)$ est une matrice symétrique réelle définie positive. On a donc $0 < \rho(A^tA) = ||A^tA||$. De plus, $Tr(A^tA)$ vaut la somme des valeurs propres de A^tA.

Le spectre de $A^tA/Tr(A^tA)$ est ainsi inclus dans $]0,1[$, donc celui de $I_n - A^tA/Tr(A^tA)$ également, d'où

$$\rho\left(I_n - \frac{A^tA}{Tr(A^tA)}\right) = \left|\left|I_n - \frac{A^tA}{Tr(A^tA)}\right|\right| < 1.$$

Remarque 3. *Ce théorème fournit une excellente approximation de l'inverse de A par la suite (X_p), dont le calcul n'utilise que des multiplications matricielles.*

Remarque 4. *Ce théorème revient à appliquer la méthode de Newton à la fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} Gl_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & A - X^{-1} \end{array} .$$

Rappel du théorème de Newton :

Théorème 5. ***(Méthode de Newton multi-dimension)*** *Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ où U ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $df(a)$ inversible. Soit $\varphi : x \mapsto x - (df(x))^{-1}f(x)$. Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(a,r) \subset U$, la suite définie par $x_p := \varphi^p(x_0)$ converge vers a. De plus, pour tout $r > 0$ suffisamment petit, la vitesse de convergence est donnée par :*

$$||x_p - a|| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^p-1} ||x_0 - a||.$$

Eléments de preuve de la remarque :

Soit $X \in GL_n(\mathbb{R})$. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de E, pour tout $H \in GL_n(\mathbb{R})$ suffisamment proche de $0_{M_n(\mathbb{R})}$, on a $X + H \in GL_n(\mathbb{R})$. Dans ces conditions et si $||X^{-1}H|| < 1$,

$$\begin{aligned} (X+H)^{-1} &= (I_n + X^{-1}H)^{-1}X^{-1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(X^{-1}H)^k\right)X^{-1} \\ &= X^{-1} - X^{-1}HX^{-1} + o(||H||) \quad \text{(norme sous-multiplicative)} \end{aligned}$$

D'où $df(X).H = X^{-1}HX^{-1}$ et on a l'application inverse $df(X)^{-1}.H = XHX$. Ainsi,

$$\varphi(X) = X - df(X)^{-1}.f(X) = X - X(A - X^{-1})X = 2X - XAX = F(X).$$

On a donc ici le lien direct entre la méthode de Newton et l'algorithme "inverser sans inverser". $\square$